数理解析研究所講究録
103巻 1970年 19-32

Oriented bordism and involutions

阪大 理 小宮克弘

§0. まずはじめに

topological pair (X, A) とその involution $\tau:(X,A)\to(X,A)$ を (X,A,τ) で表す。Atiyah [1] の bordism の概念と, Conner and Floyd [4] の involution の cobordism の概念を結合することによって, Stong [5] は (X,A,τ) の equivariant bordism group $\mathfrak{N}_*(X,A,\tau)$ 及び $\hat{\mathfrak{N}}_*(X,A,\tau)$ を定義した。

本稿の目的は，これらの oriented analogue $\Omega^{\pm}_*(X,A,\tau)$ 及び $\hat{\Omega}^{\pm}_*(X,A,\tau)$ を定義し，二，三の Stong の結果の analogue を求めることと，Stong の結果を利用して，具体的な involution (X,τ) に対して，$\hat{\mathfrak{N}}_*(X,\tau)$ を計算することである。

§1. 定義

involution (X,A,τ) を一つ固定しておく。

(1) unoriented case

triple (M,μ,f) を考える：ここに，M は compact differentiable manifold with boundary で, $\mu: M \to M$ は differentiable involution, $f: (M, \partial M) \to (X, A)$ は equivariant map (i.e. $\tau f = f\mu$) である。二つの triple (M, μ, f), (M', μ', f') が (equivariantly) bordant であるとは, 次のとき云う:

$\exists$ 4-Tuple (W, V, ν, g) such that

W, V は compact differentiable manifold with boundary で

$\partial V = \partial M \cup \partial M'$ (disjoint union)

$\partial W = M \cup V \cup M'$ (boundary で貼合せる)

$\nu: (W, V) \to (W, V)$ は differentiable involution で

$\nu|M = \mu$, $\nu|M' = \mu'$

$g: (W, V) \to (X, A)$ は equivariant map で

$g|M = f$, $g|M' = f'$

このとき, $(M, \mu, f) \sim (M', \mu', f')$ と表す。これは同値関係である。従って, $\mathfrak{N}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f)\}/\sim$ が定義される。これは triple の disjoint union に依ってアーベル群になり, さらに, 任意の $[M, \mu, f] \in \mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ と, unoriented cobordism ring $\mathfrak{N}_*$ の任意の class $[N]$ に対して,

$$[M, \mu, f]\cdot[N] = [M \times N, \mu \times 1, f\pi_1]$$

と定義することに依って, $\mathfrak{N}_*$-module になる。

$\mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ の定義に於て, involution μ, μ', ν を凡て fixed point free なものに限るとき, $\mathfrak{N}_*$-module

$$\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{ は free}\}/\sim$$

が定義される。

(2) oriented case

unoriented case の Triple $(M,\mu.f)$ 及び 4-Tuple $(W.V.\nu.g)$ で特に，M,W,V は oriented，μ,ν は orientation preserving（以下，o-p と略す），又は orientation reversing（o-r と略す）なものを考えるとき，次の4つが定義される：

$$\Omega^+_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{ は o-p}\}/\sim$$

$$\hat{\Omega}^+_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{ は o-p かつ free}\}/\sim$$

$$\Omega^-_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{ は o-r}\}/\sim$$

$$\hat{\Omega}^-_*(X,A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{ は o-r かつ free}\}/\sim$$

Ω_* を oriented cobordism ring とするとき，これらは Ω_*-module である。

§2. Stong の結果

まとめて話をするために，$\mathcal{H}_*(X,A.\tau)$ でもって $\mathfrak{N}_*(X.A.\tau)$ 又は $\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau)$ を表す。involution $(X.A.\tau)$ とその間の equivariant map の category を $\mathcal{C}$ で表す。

命題1

$\{\mathcal{H}_n, \partial_n\}$ は category $\mathcal{C}$ 上の equivariant generalized homology theory (Bredon [2]) である。

命題 2

次の triangle は exact である：

$$\begin{tikzcd}
\hat{\pi}_*(X.A.\tau) \arrow[rr, "k_*"] & & \pi_*(X.A.\tau) \arrow[dl, "F"] \\
& \bigoplus_{k=0}^{*} \pi_k(F_\tau \times BO(*-k),\ (A\cap F_\tau)\times BO(*-k)) \arrow[ul, "S"] &
\end{tikzcd}$$

ここに，F_τ は τ の fixed point set である。

命題 3

次の triangle も exact である：

$$\begin{tikzcd}
\hat{\pi}_*(X.A.\tau) \arrow[rr, "\Delta"] & & \hat{\pi}_*(X.A.\tau) \arrow[dl, "\alpha"] \\
& \pi_*(X.A) \arrow[ul, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

Δ は Smith homomorphism と呼ばれる。

詳しくは，Stong [5] Proposition 1, Proposition 2, Proposition 5 を見られたい。

§3. Oriented analogue

前節に挙げた Stong の結果の oriented analogue を考えよう。尚，命題 1′, 2′, 3′とも証明は割愛させて頂きたい。

その 1．$\Omega^{\pm}_*(X.A.\tau)$，$\hat{\Omega}^{\pm}_*(X.A.\tau)$ もまとめて話をするた

めに，$\mathcal{H}_*(X.A.\tau)$ で表す。任意の equivariant map
$f:(X.A.\tau)\to(Y.B.\sigma)$ に対して，
$\mathcal{H}_n(f):\mathcal{H}_n(X.A.\tau)\to\mathcal{H}_n(Y.B.\sigma)$ を

$$\mathcal{H}_n(f)([M.\mu.g])=[M.\mu.fg]$$

で定義する。$\partial_n:\mathcal{H}_n(X.A.\tau)\to\mathcal{H}_{n-1}(A.\tau)$ を

$$\partial_n([M.\mu.g])=[\partial M,\mu|\partial M,g|\partial M]$$

で定義する。これらは Ω_*-homomorphism である。

命題1′

> $\{\mathcal{H}_n,\partial_n\}$ は category 上の equivariant generalized homology theory である。

その2. Topological pair $(X.A)$ を一つ固定しておく。

Triple $(\xi\to M,\theta.f)$ を考える：ここに，$\xi\to M$ は compact differentiable manifold M 上の vector bundle，τ_M を M の tangent bundle とするとき，θ は $\xi\oplus\tau_M$ の orientation，$f:(M.\partial M)\to(X.A)$ は map である。

二つの triple が等しい：$(\xi_1\to M_1,\theta_1,f_1)=(\xi_2\to M_2,\theta_2,f_2)$ とは，次のときをいう：

∃ bundle isomorphism
$$\begin{array}{ccc}\xi_1 & \xrightarrow{\Phi} & \xi_2\\ \downarrow & & \downarrow\\ M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2\end{array}$$
such that

1) φ は diffeomorphism

2) $\Phi \oplus d\varphi : \xi_1 \oplus \tau_{M_1} \to \xi_2 \oplus \tau_{M_2}$ は o-p

3) $f_1 = f_2 \varphi$

任意の triple $(\xi \to M, \theta, f)$ に対し

$$-(\xi \to M, \theta, f) = (\xi \to M, -\theta, f)$$

と定義する。$\partial M \subset M$ の normal bundle を ν とするとき，$(\xi|\partial M) \oplus \tau_{\partial M} \oplus \nu = (\xi \oplus \tau_M)|\partial M$ は oriented である。ν に外向きの unit normal vector に依って orientation を与えるとき，これと compatible な $(\xi|\partial M) \oplus \tau_{\partial M}$ の orientation を $\partial\theta$ で表し，

$$\partial(\xi \to M, \theta, f) = (\xi|\partial M \to \partial M, \partial\theta, f|\partial M)$$

と定める。

二つの triple が bordant: $(\xi_1 \to M_1, \theta_1, f_1) \sim (\xi_2 \to M_2, \theta_2, f_2)$ であるとは，次のときを言う:

$\exists$ 4-tuple $(\xi \to W, V, \theta, f)$ such that

$\partial V = \partial M_1 \cup \partial M_2$ (disjoint union)

$\partial W = M_1 \cup V \cup M_2$ (boundary で貼合せる)

$f : (W, V) \to (X, A)$

$\partial(\xi \to W, \theta, f)|M_1 = (\xi_1 \to M_1, \theta_1, f_1)$

$\partial(\xi \to W, \theta, f)|M_2 = -(\xi_2 \to M_2, \theta_2, f_2)$

～は同値関係である。従って，

$$A(k,n:(X.A)) = \{(\xi^k \to M^n, \sigma. f)\}/\sim$$

が定義される。これは triple の disjoint union に依ってアーベル群になる。さらに，次の定義を行う：

$$\mathfrak{N}_m^+(X.A) = \bigoplus_{2k+n=m} A(2k,n:(X.A))$$

$$\mathfrak{N}_*^+(X.A) = \bigoplus_{m\geq 0} \mathfrak{N}_m^+(X.A)$$

$$\mathfrak{N}_m^-(X,A) = \bigoplus_{2k+1+n=m} A(2k+1,n:(X.A))$$

$$\mathfrak{N}_*^-(X.A) = \bigoplus_{m\geq 0} \mathfrak{N}_m^-(X.A)$$

$\mathfrak{N}_*^{\pm}(X.A)$ はごく自然な方法に依って Ω_*-module になる。この $\mathfrak{N}_*^{\pm}(X.A)$ の定義は，Conner [3] chapter II の $\mathfrak{N}$ よりヒントを得た。$\mathfrak{N}_*^+(pt) = \mathfrak{N}$ である。

命題 2′

次の Triangle は exact である：

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}_*^{\pm}(X.A.\tau) \arrow[rr, "k_*"] & & \Omega_*^{\pm}(X.A.\tau) \arrow[dl, "F"] \\
& \mathfrak{N}_*^{\pm}(F_\tau, F_\tau \cap A) \arrow[ul, "S"] &
\end{tikzcd}$$

Ω_*-homomorphism k_*, F, S は次のように定義する。先ず，k_* は forgetful homomorphism である。

oriented triple (M, μ, f) に対し，F_μ^m を μ の fixed point set F_μ の m 次元の component とし，$F_\mu^m \subset M$ の normal bundle

を ν_m とする。$\nu_m \oplus \tau_{F_\mu^m} = \tau_M|F_\mu^m$ の orientation o_m を M の orientation より induce されるものとする。このとき、

$$F([M^n,\mu,f]) = \bigoplus_{m=0}^{n} [\nu_m \to F_\mu^m,\ o_m,\ f|F_\mu^m]$$

と定める。尚このとき、μ が o-p かつ m が奇数ならば $F_\mu^m=\phi$, 又, μ が o-r かつ m が偶数ならば $F_\mu^m=\phi$ であることに注意しよう。

triple $(\xi\to M, o, f)$ に対し、ξ に随伴した sphere bundle を $S(\xi)$ で表す。$S(\xi)$ には $\xi\oplus\tau_M$ の orientation o より orientation を与えることができる。$S(\xi)$ の各 vector に -1 をかけることに依って得られる involution を $a: S(\xi)\to S(\xi)$ で表す。

$$f\pi:\ S(\xi)\subset \xi \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{f} F_\tau \subset X$$

とするとき、$S([\xi\to M, o, f]) = [S(\xi), a, f\pi]$ と定める。S は degree -1 の homomorphism である。

その3. Smith homomorphism $\Delta: \hat{\Pi}_n(X,A,\tau)\to\hat{\Pi}_{n-1}(X,A,\tau)$ の oriented analogue は次のように定義される。(S^k,a) を k 次元球面の antipodal involution とする。(M^n,μ,f) を任意の oriented triple とするとき、$k>n$ なる k に対して、equivariant map $\lambda:(M^n,\mu)\to(S^k,a)$ で S^{k-1} の上で transverse regular なものが存在する。このとき $N=\lambda^{-1}(S^{k-1})$ とし、$N\subset M$ の normal bundle を ν とするとき、$\tau_N\oplus\nu=\tau_M|N$ は oriented であり、ν にも又、$S^{k-1}\subset S^k$ の oriented trivial normal bundle より orientation が induce される。これらと compatible な orientation に依って N に orientation を与える。このとき，N の involution $\mu|N$ は μ が o-p ならば o-r，逆に o-r ならば o-p である。従って，$(M.\mu.f)$ の class に $(N, \mu|N, f|N)$ の class を対応させることに依って，oriented Smith homomorphism $\Delta : \hat{\Omega}^{\pm}_{n}(X.A.\tau) \to \hat{\Omega}^{\mp}_{n-1}(X.A.\tau)$ が定義される。

命題 3′

次の Triangle は exact である：

$$\begin{tikzcd} \hat{\Omega}^{\pm}_{*}(X.A.\tau) \arrow[rr, "\Delta"] & & \hat{\Omega}^{\mp}_{*}(X.A.\tau) \arrow[dl, "\alpha"] \\ & \Omega_{*}(X.A) \arrow[ul, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

α と β は次のように定義される：

$$\alpha([M.\mu.f]) = [M.f]$$

$$\beta([M.f]) = [M \pm M, c.\ f + \tau f]$$

ここに，c は component を入替える involution である。

§4. $\hat{\mathfrak{N}}_{*}(S^n.\ a_p)$ と $\hat{\mathfrak{N}}_{*}(FP(n).\ a_p)$

S^n を n 次元球面とし，任意の $p \geqq 0$ に対して S^n の involution a_p を次のように定める：

$$a_p(x_1,\cdots,x_{n+1})=\begin{cases}(x_1,\cdots,x_{n+1}) & p=0\\ (-x_1,\cdots,-x_p,x_{p+1},\cdots,x_{n+1}) & 0<p<n+1\\ (-x_1,\cdots,-x_{n+1}) & n+1\leqq p\end{cases}$$

$a_0=1$, $n+1\leqq p$ のとき $a_p=a$ である。

$\mathbb{F}$ = 実数体 R, 複素数体 C, 又は四元数体 Q とし, $\mathbb{F}P(n)$ を $\mathbb{F}$ 上の n 次元射影空間とする。任意の $p>0$ に対して, $\mathbb{F}P(n)$ の *involution* a_p を次のように定める:

$$a_p([u_1,\cdots,u_{n+1}])=\begin{cases}[-u_1,\cdots,-u_p,u_{p+1},\cdots,u_{n+1}] & 0<p<n+1\\ [-u_1,\cdots,-u_{n+1}] & n+1\leqq p\end{cases}$$

$n+1\leqq p$ のとき, $a_p=1$ である。

$\pi_1: S^n\times S^k\to S^n$ を第一因子への *projection*, $n: S^k\to S^n$ を $n(S^k)=(0,\cdots,0,1)\in S^n$ なる *constant map*, $k\leqq n$ のとき $i: S^k\to S^n$ を後の座標を 0 として入れる *inclusion map* とする。$[S^n\times S^k, a_p\times a, \pi_1]$, $[S^k, a, i]$ はそれぞれ $\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n,a_p)$, $\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n,a)$ の *class* を表し, $p\leqq n$ のとき, $[S^k, a, n]$ は $\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n,a_p)$ の *class* を表す。射影空間に対しても *projection* π_1 と *inclusion map* i を同様に定義するとき, $[\mathbb{F}P(r)\times S^k, a_p\times a, i\pi_1]$ $(0\leqq r\leqq n)$ は $\hat{\mathfrak{N}}_*(\mathbb{F}P(n),a_p)$ の *class* を表す。

定理 1

1) $\hat{\mathfrak{N}}_*(S^0, 1)$ は $\{[S^0\times S^k, 1\times a, \pi_1] \mid k\geqq 0\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

2) $0<n$, $0\leqq p\leqq n$ のとき，$\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n, a_p)$ は $\{[S^n\times S^k, a_p\times a, \pi_1], [S^k, a, n] \mid k\geqq 0\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

3) $\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n, a)$ は $\{[S^k, a, i] \mid 0\leqq k\leqq n\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

定理 2

任意の n, p に対して，$\hat{\mathfrak{N}}_*(FP(n), a_p)$ は $\{[FP(r)\times S^t, a_p\times a, i\pi_1] \mid 0\leqq r\leqq n, 0\leqq t\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

これらの結果より，命題 3 の exact triangle は次のように split することがわかる：

系

次の三つの split short exact sequence を得る：

$$0\to \mathfrak{N}_m(S^n)\xrightarrow{\beta}\hat{\mathfrak{N}}_m(S^n, a_p)\xrightarrow{\Delta}\hat{\mathfrak{N}}_{m-1}(S^n, a_p)\to 0 \quad (0\leqq p\leqq n)$$

$$0\to \mathfrak{N}_m(S^n)\xrightarrow{\beta}\hat{\mathfrak{N}}_m(S^n, a)\xrightarrow{\Delta}\hat{\mathfrak{N}}_{m-1}(S^n, a)\to 0 \quad (0<n, m<n)$$

$$0\to \mathfrak{N}_m(FP(n))\xrightarrow{\beta}\hat{\mathfrak{N}}_m(FP(n), a_p)\xrightarrow{\Delta}\hat{\mathfrak{N}}_{m-1}(FP(n), a_p)\to 0$$

定理1,2の証明は，いずれも命題3のexact triangleを使って，各equivariant bordism groupの次元に関する帰納法に依って得られる。以下に，定理2の証明のあらましを述べる。

［定理2の略証］ $F=R, C$ 又は Q に従って，$f=1, 2$ 又は 4 とする。$\hat{\mathfrak{N}}_{fr+t}(FP(n), a_p)$ の class $[FP(r)\times S^t, a_p\times a, i\pi_1]$ を $A_{f.n.p}(r.t)$ で表し，次の命題を $D(m)$ と名付ける：

D(m)

1) $\hat{\mathfrak{N}}_m(FP(n).\ a_p) = \bigoplus\left\{A_{f.n.p}(r.t)\mathfrak{N}_k \,\middle|\, \begin{matrix} 0\leqq r\leqq n,\ 0\leqq t \\ fr+t+k=m \end{matrix}\right\}$

2) $\mathfrak{N}_{m-fr-t}$ の 0 でない任意の class x に対して，

$A_{f.n.p}(r.t)\cdot x \neq 0$ in $\hat{\mathfrak{N}}_m(FP(n).\ a_p)$

定理2を証明するためには，任意の $m\geqq 0$ に対して $D(m)$ が正しいことを示せば十分である。

CW-pair $(X.\ A)$ に対して，よく知られた結果：

$\mathfrak{N}_*(X.\ A) \approx H_*(X.\ A : \mathbb{Z}_2)\otimes\mathfrak{N}_*$

（例えば，Conner and Floyd [4] 定理17.1）

を使って，次の補題を得る：

補題1

$\mathfrak{N}_*(FP(n))$ は $\{[FP(r), i] \mid 0\leqq r\leqq n\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

又，各 homomorphism の定義より，容易に次の補題を得る：

補題2

1) $\Delta(s_{f.n.p}(r.t)) = s_{f.n.p}(r.t-1)$

2) $d(s_{f.n.p}(r.t)) = 0$

3) $\beta([\overline{FP}(r).i]) = s_{f.n.p}(r.0)$

命題3より，特に次の exact sequence を得る：

$$0 \leftarrow \hat{\mathfrak{N}}_0(\overline{FP}(n).a_p) \xleftarrow{\beta} \mathfrak{N}_0(\overline{FP}(n)) \xleftarrow{\alpha} \hat{\mathfrak{N}}_0(\overline{FP}(n).a_p)$$

これより $D(0)$ が計算される。次に，$D(m-1)$ まで計算されたとするとき，次の exact sequence が得られる：

$$0 \leftarrow \bigoplus_{fr+t+k=m-1} s_{f.n.p}(r.t)\mathfrak{N}_k \xleftarrow{\Delta} \hat{\mathfrak{N}}_m(\overline{FP}(n).a_p) \xleftarrow{\beta} \mathfrak{N}_m(\overline{FP}(n)) \xleftarrow{\alpha} \hat{\mathfrak{N}}_m(\overline{FP}(n),a_p)$$

これを使って $D(m)$ が計算される。 q.e.d.

尚，定理1の3)に関しては，a が fixed point free であることに依って，はるかに簡単な別証がある。則ち，

$$\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n.a) \approx \mathfrak{N}_*(RP(n)) \approx H_*(RP(n):Z_2)\otimes\mathfrak{N}_*$$

より，一発で得られる。

参考文献

[1] M.F. Atiyah: Bordism and cobordism, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 200–208

[2] G. E. Bredon : Equivariant cohomology theories, Lecture notes in Math. 34 (1967) Springer-Verlag

[3] P. E. Conner : Lectures on the action of finite group, Lecture notes in Math. 73 (1968) Springer-Verlag.

[4] P. E. Conner and E. E. Floyd : Differentiable periodic maps, (1964) Springer-Verlag.

[5] R. E. Stong : Bordism and involutions, Ann. Math. 90 (1969) 47 - 74.